

EVALUAREA NAȚIONALĂ PENTRU ABSOLVENȚII CLASEI a VIII-a

Matematică

Test 39

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 2 ore.

SUBIECTUL I - Pe foaia de examen scrieți numai rezultatele.

(30 de puncte)

- 5p 1. Rezultatul calculului $35 - 5 \cdot 6$ este egal cu
- 5p 2. Cel mai mic multiplu comun al numerelor 6 și 9 este egal cu
- 5p 3. Cel mai mic număr întreg din intervalul $(-5, 4)$ este egal cu
- 5p 4. Măsurile a două unghiuri ale unui triunghi sunt egale cu 60° , respectiv 30° . Măsura celui de-al treilea unghi al triunghiului este egală cu ...°.
- 5p 5. În Figura 1 este reprezentată o piramidă patrulateră $VABCD$ cu $VO \perp (ABC)$. Unghiul dreptelor AB și VO are măsura de ...°.

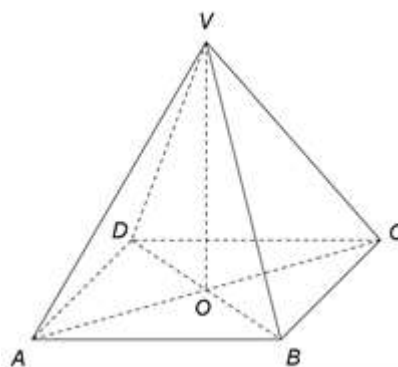
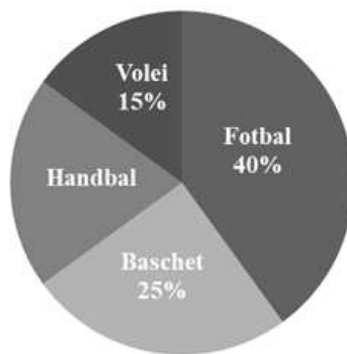


Figura 1

- 5p 6. În diagrama următoare este reprezentată distribuția celor 80 de elevi ai unui club sportiv în funcție de sportul practicat. Fiecare elev practică în cadrul clubului un singur sport.



Conform informațiilor din diagramă, numărul elevilor care practică handbalul este egal cu

SUBIECTUL al II-lea - Pe foaia de examen scrieți rezolvările complete.

(30 de puncte)

- 5p 1. Desenați, pe foaia de examen, un cub $ABCD A' B' C' D'$.
- 5p 2. Determinați numerele naturale nenule m și n , știind că $\frac{m}{n} = \frac{2}{3}$ și $(n+m)(n-m) = 180$.
- 5p 3. Ana și Mihai au împreună 214 lei. Determinați ce sumă de bani are Ana, știind că Mihai are cu 20 de lei mai mult decât Ana.
4. Se consideră numerele reale $x = \left(\frac{4}{\sqrt{2}} + \frac{6}{\sqrt{18}} - \frac{10}{\sqrt{50}} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$ și $y = (3 + \sqrt{2})^2 + (\sqrt{6} - \sqrt{3})^2 - \sqrt{2}^4$.
- 5p a) Arătați că $x = 2$.
- 5p b) Determinați cel mai mic număr natural n pentru care numărul $N = n \cdot x \cdot y$ este pătratul unui număr natural nenul.

- 5p 5. Se consideră expresia $E(x) = (2x+3)^2 - (2-x)(2+x) - 5x^2 - 12x$, unde x este număr real.
- Determinați numerele întregi n pentru care numărul $\frac{E(n)}{n^2+1}$ este întreg.

SUBIECTUL al III-lea - Pe foaia de examen scrieți rezolvările complete.

(30 de puncte)

1. În *Figura 2* sunt reprezentate triunghiurile dreptunghice isoscele ABC , CDF și DEF , cu ipotenuzele BC , DF , respectiv EF . Punctul F este mijlocul segmentului BC și $AB = 24$ cm.

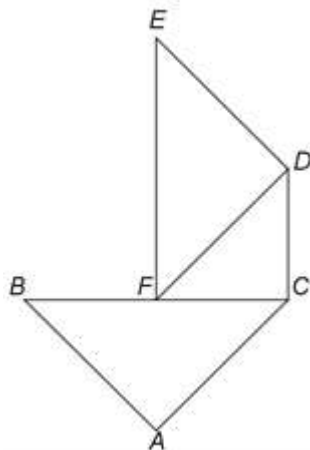


Figura 2

- 5p a) Arătați că perimetrul triunghiului ABC este egal cu $24(2 + \sqrt{2})$ cm.
- 5p b) Calculați lungimea segmentului BE .
- 5p c) Demonstrați că patrulaterul $ACDE$ este trapez isoscel.

2. În *Figura 3* este reprezentată o piramidă triunghiulară $VABC$ cu triunghiul ABC echilateral, $AB = 20$ cm, $VA = 30$ cm și $VO \perp (ABC)$, unde O este centrul cercului circumscris triunghiului ABC . Punctele M și N sunt mijloacele segmentelor AB , respectiv BC , iar punctul P este situat pe muchia CV astfel încât $VP = 10$ cm.

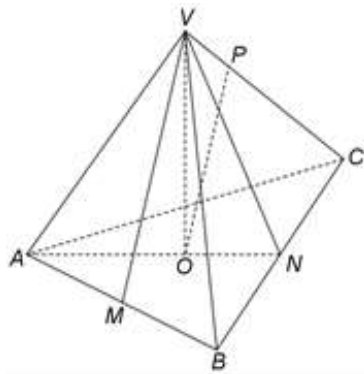


Figura 3

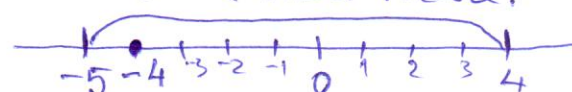
- 5p a) Arătați că aria triunghiului ABC este egală cu $100\sqrt{3}$ cm².
- 5p b) Demonstrați că dreapta PO este paralelă cu planul (VMN) .
- 5p c) Determinați cosinusul unghiului dreptelor AC și VM .

TESTUL 39: REZOLVARE

Subiectul I: 1) $35 - 5 \cdot 6 = 35 - 30 = 5$; $\left\{ \begin{array}{l} 6 = 2 \cdot 3 \\ 9 = 3^2 \\ \text{m.c.} = 2 \cdot 3^2 = \\ = 2 \cdot 9 = 18 \end{array} \right.$

2) c.m.m.m.c. al nr. 6 și 9 este 18.

Se calculează înmulțind factorii comuni și necomuni, la puterea cea mai mare.

3)  Cel mai mic întreg din $(-5; 4)$ este -4.

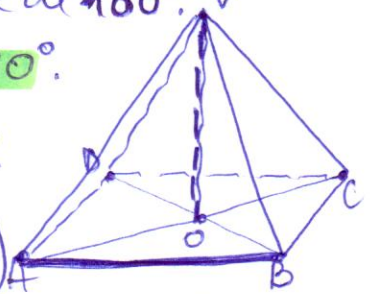
4) Suma măsurilor unghiurilor unui triunghi este de 180° .
 $60^\circ + 30^\circ + x = 180^\circ \Rightarrow x = 180^\circ - 60^\circ - 30^\circ = 90^\circ$.

5) $VO \perp (ABC)$ $\left\{ \begin{array}{l} \Rightarrow VO \perp AB \Rightarrow m(\widehat{AB; VO}) = 90^\circ. \\ AB \subset (ABC) \end{array} \right.$

(O dreaptă $\perp$ pe un plan e $\perp$ pe orice dr. din plan.)

6) Procentul celor care practică handbalul este $100\% - (15\% + 40\% + 25\%) = 100\% - 80\% = 20\%$

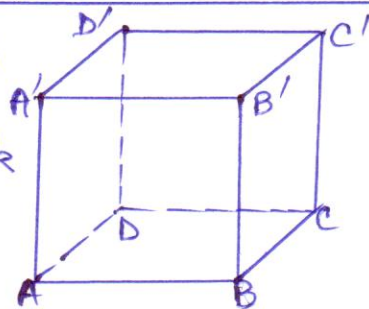
Numărul celor care practică handbalul este $(20\% \text{ din } 80) =$
 $= \frac{20}{100} \cdot 80 = 16$ (elevi).



Subiectul al II-lea: 1)

2) $\frac{m}{n} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{m}{2} = \frac{n}{3} = k$

Deci $\begin{cases} m = 2k \\ n = 3k \end{cases}$



$\begin{cases} (n+m)(n-m) = n^2 - m^2 \\ (n+m)(n-m) = 180 \end{cases} \Rightarrow n^2 - m^2 = 180 \Leftrightarrow (3k)^2 - (2k)^2 = 180 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 9k^2 - 4k^2 = 180 \Leftrightarrow 5k^2 = 180 \Leftrightarrow k^2 = \frac{180}{5} \Leftrightarrow k^2 = 36 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k = \pm \sqrt{36} = \pm 6$. Pt $k = 6$ obținem numerele naturale

$\begin{cases} m = 2k = 2 \cdot 6 = 12 \\ n = 3k = 3 \cdot 6 = 18 \end{cases}$

Pt $k = -6$ se obțin numere m și n negative.
 Deci numerele m și n naturale căutate
 sunt $\begin{cases} m = 12 \\ n = 18. \end{cases}$

3) Mihai $\begin{array}{|c|c|} \hline 94 & 20 \\ \hline \end{array}$ } 214
 Ana $\begin{array}{|c|} \hline 94 \\ \hline \end{array}$

$214 - 20 = 194$; $194 : 2 = 97$

R: Ana are 97 lei.

$$4) a) x = \left(\frac{4}{\sqrt{2}} + \frac{8^2}{3\sqrt{2}} - \frac{16^2}{5\sqrt{2}} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{4}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{4}{2} = 2, \text{ deci } x = 2.$$

$$\begin{cases} \sqrt{18} = \sqrt{9 \cdot 2} = 3\sqrt{2} \\ \sqrt{50} = \sqrt{25 \cdot 2} = 5\sqrt{2} \end{cases}$$

$$b) y = (3 + \sqrt{2})^2 + (\sqrt{6} - \sqrt{3})^2 - \sqrt{2^4} =$$

$$= 9 + 6\sqrt{2} + 2 + 6 - 2\sqrt{6}\sqrt{3} + 3 - 4 =$$

$$= 9 + 6\sqrt{2} + 2 + 6 - 6\sqrt{2} + 3 - 4 = 16,$$

$$\text{deci } y = 16.$$

$$\begin{cases} \sqrt{2}^4 = \sqrt{2^4} = \\ = 2^2 = 4 \\ \sqrt{6}\sqrt{3} = \sqrt{18} = \\ = \sqrt{9 \cdot 2} = 3\sqrt{2} \end{cases}$$

$$n \in \mathbb{N}, N = n \times y = n \cdot 2 \cdot 16 = n \cdot 2 \cdot 2^4 = n \cdot 2^5$$

Cel mai mic nr. natural nenul n pentru care N este pătratul unui nr. natural nenul este $n = 2$, iar atunci $N = n \cdot 2^5 = 2 \cdot 2^5 = 2^6 = (2^3)^2$, deci $N = 8^2$.

$$R: n = 2.$$

$$5) E(x) = \frac{4x^2 + 12x + 9}{x^2 + 5x + 4} - \frac{5x^2 + 12x}{x^2 + 5x + 4} =$$

$$= 5. \text{ Deci } E(x) = 5, \forall x \in \mathbb{R}. \quad \begin{cases} (2-x)(2+x) = 4 - x^2 \\ (2x+3)^2 = 4x^2 + 12x + 9 \end{cases}$$

$$n \in \mathbb{Z}; E(n) = 5, \text{ pt. orice } n \in \mathbb{Z}.$$

$$\frac{E(n)}{n^2 + 1} = \frac{5}{n^2 + 1} \in \mathbb{Z} \Rightarrow n^2 + 1 \in D_5 = \{-5, -1, 1, 5\}$$

Avem cazurile:

$$n^2 + 1 = -5 \Rightarrow n^2 = -1 - 5 \Rightarrow n^2 = -6 \Rightarrow n \notin \mathbb{Z}$$

$$n^2 + 1 = -1 \Rightarrow n^2 = -1 - 1 \Rightarrow n^2 = -2 \Rightarrow n \notin \mathbb{Z}$$

$$n^2 + 1 = 1 \Rightarrow n^2 = -1 + 1 \Rightarrow n^2 = 0 \Rightarrow n = 0 \in \mathbb{Z}, \text{ soluție}$$

$$n^2 + 1 = 5 \Rightarrow n^2 = 5 - 1 \Rightarrow n^2 = 4 \Rightarrow n = \pm \sqrt{4} = \pm 2, \text{ soluții}$$

$$R: \frac{E(n)}{n^2 + 1} \in \mathbb{Z} \text{ pentru } n \in \{-2; 0; 2\}.$$

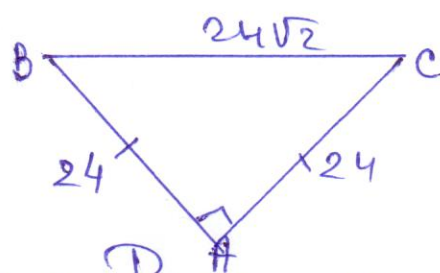
Subiectul al III-lea:

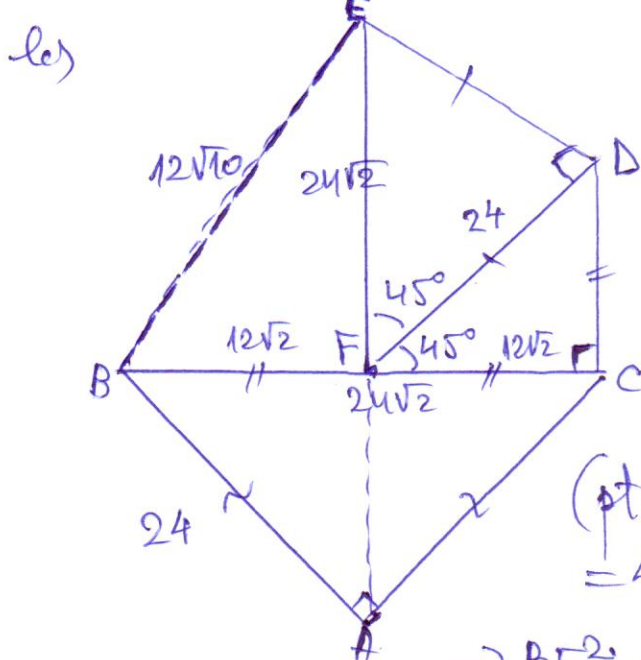
1) a) $\triangle ABC$, dr. isoscel
cu $m(\hat{A}) = 90^\circ$

$\Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} BC = AB\sqrt{2} = 24\sqrt{2} \text{ (cm)} \\ AB = AC = 24 \text{ cm} \end{cases} \Rightarrow P_{\triangle ABC} = AB + AC + BC =$$

$$= 24 + 24 + 24\sqrt{2} = 2 \cdot 24 + 24\sqrt{2} = 24 \cdot (2 + \sqrt{2}) \text{ cm, r.e.d.}$$





$$BC = AB\sqrt{2} = 24\sqrt{2} \text{ cm}$$

$$BF = FC = \frac{BC}{2} = \frac{24\sqrt{2}}{2} = 12\sqrt{2} \text{ (cm)}$$

$$DF = CF\sqrt{2} = 12\sqrt{2}\sqrt{2} = 24 \text{ (cm)}$$

$$EF = DF\sqrt{2} = 24\sqrt{2} \text{ cm}$$

$$\text{T.P. in } \triangle EFB \text{ cu } m(\widehat{EFB}) = 90^\circ \Rightarrow$$

$$(\text{pt. c\aa } m(\widehat{EFC}) = m(\widehat{EFD}) + m(\widehat{DFC}) = 45^\circ + 45^\circ = 90^\circ \text{ m' } B, F, C: \text{coliniari})$$

$$\Rightarrow BE^2 = BF^2 + FE^2 = (12\sqrt{2})^2 + (24\sqrt{2})^2 =$$

$$= 144 \cdot 2 + 576 \cdot 2 = 288 + 1152 = 1440 \Rightarrow BE = \sqrt{1440} =$$

$$= \sqrt{144 \cdot 10} = \sqrt{144} \cdot \sqrt{10} = 12\sqrt{10} \text{ (cm.)}$$

c) $AF \perp BC$ (mediana unui $\triangle$ isoscel este m' m\altime) } $\Rightarrow$
 $CD \perp FC = BC$ (ip.)

$$\Rightarrow AE \parallel CD. \text{ (1)}$$

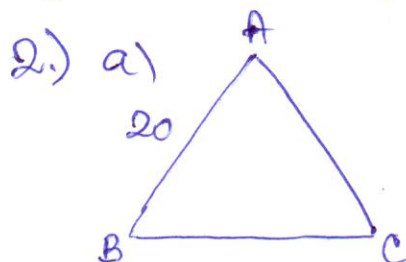
$$\text{Am calculat } FD = 24 \text{ cm ; } FD = DE = 24 \text{ cm } (\triangle DEF: \text{dr. isos.})$$

$$\underline{AC} = AB = 24 \text{ cm } (\triangle ABC: \text{dr. isosc.})$$

$$\text{Deci } AC = DE = 24 \text{ cm } \text{ (2)}$$

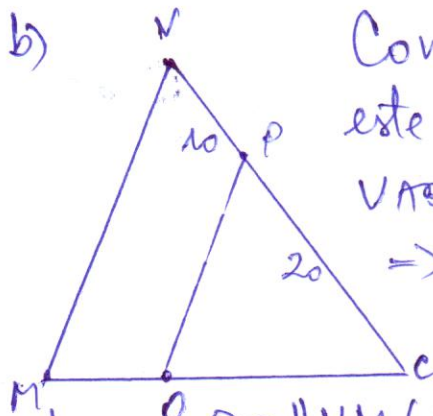
Din (1) m' (2) $\Rightarrow ACDE$: trapez isoscel

[Obs. Mai simplu dec\at (2) puteam observa c\aa $m(\widehat{DEF}) = m(\widehat{CAF}) = 45^\circ$.



$$A_{\triangle \text{echilateral}} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} ; \triangle ABC: \text{echilateral,}$$

$$A_{\triangle ABC} = \frac{AB^2\sqrt{3}}{4} = \frac{20^2\sqrt{3}}{4} = \frac{400\sqrt{3}}{4} = 100\sqrt{3} \text{ (cm}^2\text{)} \quad \text{g.e.d.f.}$$



Consider\am $\triangle VCM$ m' avem: $\frac{CO}{OM} = \frac{2}{1}$ pt. c\aa O este m' centrul de greutate al $\triangle ABC$ echilateral.

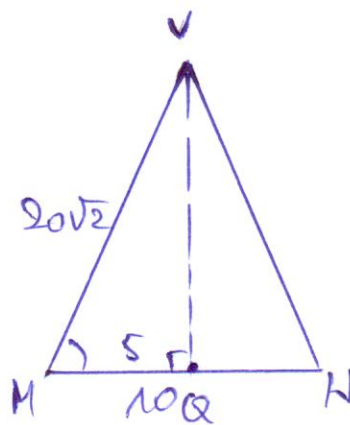
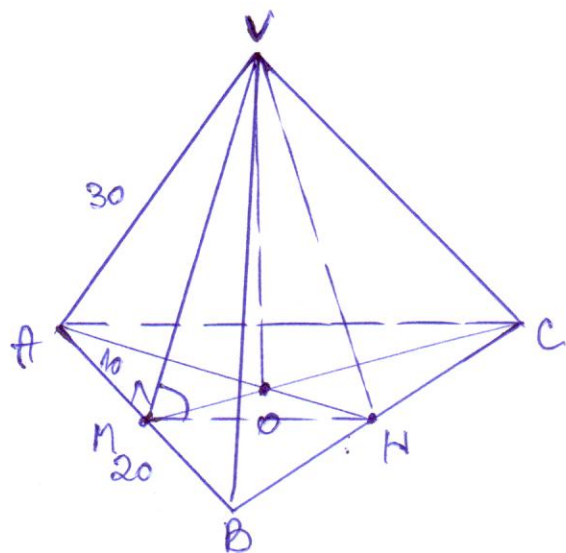
$VABC$: piramid\ triangular\ regulat\ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow VC = VA = 30 \text{ cm. } VP = 10 \text{ cm } \Rightarrow CP = 20 \text{ cm m'}$$

$$\frac{CP}{PV} = \frac{20}{10} = \frac{2}{1}. \text{ Deci } \frac{CO}{OM} = \frac{CP}{PV} = 2 \text{ m'}$$

atunci $PO \parallel VM$ (R.T. Thales). $PO \parallel VM$ (g.e.d.f.) $\Rightarrow PO \parallel VM$ (g.e.d.f.)

c)



AC și VM : necoplanare
 MN : linie mijlocie în $\triangle ABC \Rightarrow MN \parallel AC$

$$\left. \begin{array}{l} \Rightarrow m(\widehat{AC, VM}) = \\ = m(\widehat{MN, VM}) = \\ = m(\widehat{VMH}), \text{ al cărui cosinus îl vom afla din } \triangle VQH \end{array} \right\}$$

dreptunghi în Q , unde am dus $VQ \perp MN$: înălțime și mediană în $\triangle VMH$: isoscel, $VM = VH$: apoteme ale piramidei regulate.

Acum vom calcula toate dimensiunile necesare:

$$MN = \frac{AC}{2} = \frac{20}{2} = 10 \text{ cm, fiind linie mijlocie în } \triangle ABC.$$

$$MQ = QH = \frac{10}{2} = 5 \text{ (cm)}.$$

Cu T.P. în $\triangle VMA$ dreptunghi în M calculăm apotema VM :

$$VM^2 = VA^2 - MA^2 = 30^2 - 10^2 = (30-10)(30+10) = 20 \cdot 40 = 2 \cdot 400$$

$$VM = \sqrt{2 \cdot 400} = 20\sqrt{2} \text{ (cm)}$$

$$\text{În } \triangle VQH \text{ cu } m(\hat{Q}) = 90^\circ \text{ avem } \cos(\widehat{VMQ}) = \frac{MQ}{VM} = \frac{5}{20\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4 \cdot 2} = \frac{\sqrt{2}}{8}.$$

$$\text{Deci } \cos(\widehat{AC, VM}) = \frac{\sqrt{2}}{8}.$$

EVALUAREA NAȚIONALĂ PENTRU ABSOLVENȚII CLASEI a VIII-a

Matematică

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Test 39

- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

- Se punctează doar rezultatul, astfel: pentru fiecare răspuns se acordă fie 5 puncte, fie 0 puncte.
- Nu se acordă punctaje intermediare.

SUBIECTUL al II-lea și SUBIECTUL al III-lea

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	5	5p
2.	18	5p
3.	-4	5p
4.	90	5p
5.	90	5p
6.	16	5p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.	Desenează cubul Notează cubul $ABCD A'B'C'D'$	4p 1p
2.	$\frac{m}{n} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{m}{2} = \frac{n}{3} = k$, unde k este număr rațional pozitiv, deci $m = 2k$ și $n = 3k$, de unde obținem $(n+m)(n-m) = 180 \Leftrightarrow 5k \cdot k = 180 \Leftrightarrow k^2 = 36$ Cum k este număr rațional pozitiv, obținem $k = 6$, deci $m = 12$ și $n = 18$	3p 2p
3.	$x + (x + 20) = 214$, unde x este suma de bani pe care o are Ana $x = 97$ de lei	3p 2p
4.	a) $x = \left(\frac{4}{\sqrt{2}} + \frac{6}{3\sqrt{2}} - \frac{10}{5\sqrt{2}} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{60 + 30 - 30}{15\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{60}{15\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{4}{2} = 2$ b) $y = 9 + 6\sqrt{2} + 2 + 6 - 2\sqrt{18} + 3 - 4 = 16 + 6\sqrt{2} - 6\sqrt{2} = 16$ $N = n \cdot x \cdot y = n \cdot 2 \cdot 16$, deci cel mai mic număr natural n pentru care N este pătratul unui număr natural nenul este $n = 2$	3p 2p 3p 2p
5.	$E(x) = 4x^2 + 12x + 9 - (4 - x^2) - 5x^2 - 12x = -x^2 + 9 - 4 + x^2 = 5$, pentru orice număr real x Cum n este număr întreg, $\frac{E(n)}{n^2 + 1} \in \mathbb{Z} \Rightarrow n^2 + 1 \in \{1, 5\}$, de unde obținem $n = -2$, $n = 0$ sau $n = 2$	3p 2p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.	a) $\triangle ABC$ este dreptunghic isoscel cu $AB = 24$ cm, deci $AC = 24$ cm și $BC = 24\sqrt{2}$ cm $P_{\triangle ABC} = AB + BC + AC = 48 + 24\sqrt{2} = 24(2 + \sqrt{2})$ cm	3p 2p
----	--	----------

	b) $\triangle CDF$ este dreptunghic isoscel $\Rightarrow m(\angle CFD) = 45^\circ$ și $\triangle DEF$ este dreptunghic isoscel $\Rightarrow m(\angle DFE) = 45^\circ$, deci $m(\angle CFE) = m(\angle CFD) + m(\angle DFE) = 90^\circ \Rightarrow EF \perp BF$ F este mijlocul segmentului $BC \Rightarrow BF = CF = 12\sqrt{2}$ cm și $\triangle CDF$ este dreptunghic isoscel, deci $DF = 24$ cm și, cum $\triangle DEF$ este dreptunghic isoscel, obținem $EF = 24\sqrt{2}$ cm, deci, cum $\triangle BEF$ este dreptunghic, $BE = \sqrt{EF^2 + BF^2} = 12\sqrt{10}$ cm	2p
	c) $\triangle ABC$ este isoscel și F este mijlocul laturii $BC \Rightarrow AF \perp BC$ și, cum $EF \perp BC$, obținem că punctele A, F și E sunt coliniare $EF \perp BC$ și $DC \perp BC \Rightarrow AE \parallel DC$ și, cum $AC = DE = 24$ cm, obținem că $ACDE$ este trapez isoscel	2p 3p
2.	a) $\triangle ABC$ este echilateral, deci $\mathcal{A}_{\triangle ABC} = \frac{AB^2 \sqrt{3}}{4} =$ $= \frac{400\sqrt{3}}{4} = 100\sqrt{3} \text{ cm}^2$	3p 2p
	b) $VO \perp (ABC) \Rightarrow VO \perp OA, VO \perp OC$ și O este centrul centrului circumscris $\triangle ABC$, deci $OA = OC$ și, cum VO este latură comună, obținem că $\triangle VOA \equiv \triangle VOC$, deci $CV = 30$ cm și, cum $VP = 10$ cm, obținem că $\frac{CP}{CV} = \frac{2}{3}$ $\triangle ABC$ este echilateral, O este centrul centrului circumscris $\triangle ABC$ și M este mijlocul segmentului AB, deci C, O și M sunt coliniare și $\frac{CO}{CM} = \frac{2}{3} = \frac{CP}{CV} \Rightarrow PO \parallel VM$ și, cum $VM \subset (VMN)$, obținem că $PO \parallel (VMN)$	2p 3p
	c) MN linie mijlocie în $\triangle ABC \Rightarrow MN \parallel AC \Rightarrow m(\angle(AC, VM)) = m(\angle(MN, VM)) = m(\angle VMN)$ $VM = VN = 20\sqrt{2}$ cm $\Rightarrow \triangle VMN$ este isoscel $\Rightarrow VQ \perp MN$, unde Q este mijlocul segmentului MN, de unde obținem $\cos(\angle VMN) = \frac{MQ}{VM} = \frac{5}{20\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{8}$	2p 3p